氏名	崔　貞 序
生年月日	
本籍	韓国
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	博甲第363号
学位授与の日付	平成12年3月31日
学位授与の要件	課程博士（学位規則第4条第1項）
学位授与の題目	On a De Rham Cohomology Associated with Riemannian foliations（リーマン葉層構造に付随したド・ラーム　コホモロジーについて）
論文審査委員(主査)	北原　晴夫（自然科学研究科・教授）
論文審査委員(副査)	勘甚　裕一（自然科学研究科・教授）藤本　坦孝（理学部・教授） 中尾愼太郎（理学部・教授）林田　和也（自然科学研究科・教授）

学位論文要旨

(M,η) を $(2m+1)$ 次元 contact manifold, η を contact form とする. (M,η) の de Rham cohomology を調べる一つ方法は, (M,η) に Riemannian metric を与えて, Reeb vector field による Riemann flow E と考えることである. E に適当な条件を仮定すると, $(M,\eta) \longrightarrow$ leaf space M/E (V-manifold) であるから, M の de Rham cohomology と　M/E の de Rham cohomology とに「ある」対応がつく. 佐々木多様体の C-調和形式の理論はこのカテゴリーに属する.

1990 に, Rumin ([R1,R2]) は, ある「hypo-subellipticity」の評価も含めて contact manifold に密接に関連した de Rham complex (Rumin complex という) を定義した. 本論文では contact manifold を Riemann 葉層構造と見なして, Rumin complex を Riemann 葉層構造の cohomology として書き替え, 「一般化」を考える. また,C-調和形式の理論を整理する.

1.Rumin 複体

(M,η) の hyperplane bundle $\mathfrak{D} \subset TM$ を $\ker \eta = \mathfrak{D}$ で定義する. Ω^* を M 上の differential forms の graded algebra とする.

$$\mathcal{R}^k := \begin{cases} \Omega^k/\{\eta\wedge\beta + d\eta\wedge\gamma \mid \beta,\gamma\in\Omega^k\} & k \geq m+1 \\ \{\alpha\in\Omega^k \mid \eta\wedge\alpha = d\eta\wedge\alpha = 0\} & k\leq m \end{cases}$$

とおく. de Rham 複体から $\mathcal{R}^*$ 上に誘導された複体を考える. $d_{\mathfrak{D}}$ を d から $\mathfrak{D}$ 上に誘導された differential operator とする. このとき,

Theorem 1.1 (Rumin,1990) 2 nd differential linear operator $\widetilde{D} : \mathcal{R}^m \longrightarrow \mathcal{R}^{m+1}$ が存在して

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{d_{\mathfrak{D}}} \mathcal{R}^1 \xrightarrow{d_{\mathfrak{D}}} \mathcal{R}^2 \xrightarrow{d_{\mathfrak{D}}} \cdots \xrightarrow{d_{\mathfrak{D}}} \mathcal{R}^m$$
$$\xrightarrow{\widetilde{D}} \mathcal{R}^{m+1} \xrightarrow{d_{\mathfrak{D}}} \mathcal{R}^{m+2} \cdots \xrightarrow{d_{\mathfrak{D}}} \mathcal{R}^{2m+1} \longrightarrow 0$$

2.Riemannian foliations の differential complex

(M,g,E) を m 次元 Riemannian manifold で, E を M に与えられた p 次元（または q 余次元) Riemann 葉層構造とする. このとき, 直交分解

$$TM = E \oplus Q \simeq E \oplus E^{\perp}$$

ここに, $Q := E^{\perp}$. Ω^* の associated bigrading $\Omega^{p,q} := \Omega^p(E) \otimes \Omega^q(\mathcal{D})$ とおく. このとき, d を

$$d := d^{-1,2} + d^{1,0} + d^{0,1} \quad d^{a,b} : \Omega^{p,q} \longrightarrow \Omega^{p+a,q+b}.$$

に分解する. d の形式的随伴作用素 (formal adjoint operator) を $\delta := \delta_{-1,0} + \delta_{0,-1} + \delta_{1,-2}$ と書くことができる.

Fact 2.1

$$d_{1,0} =: d_E \quad \text{on } \Omega^{(\cdot,0)} := \Gamma(\Lambda^{\cdot} E^*), \tag{2.1}$$

ただし, d_E を leaves に沿った微分という.

$$d_B := d_{1,0} \quad \text{on } \Omega^{(0,\cdot)} := \Gamma(\Lambda^{\cdot} Q^*) \tag{2.2}$$

d_B を 底的微分 (basic derivative) という.

Fact 2.2 $d_{-1,2}$ and $\delta_{1,-2}$ は 0 次微分作用素である.
E は oriented, transversally oriented と仮定する. $*_E, *_Q$ をそれぞれ $\Gamma(\Lambda E^*), \Gamma(\Lambda Q^*)$ 上の $*$ 作用素とする.

Fact 2.3 M の orientation と E, Q の orientations とが同調するように選んでおく. このとき,

$$* = (-1)^{(p-u)v} *_E \otimes *_Q \quad \text{on } \Omega^{(u,v)} \tag{2.3}$$

さらに, $*_E$, $*_Q$ を $*_E = *_E \otimes \mathrm{id}$ and $*_Q = \mathrm{id} \otimes *_Q$ とおいて,$\Lambda^* M$ に拡張する.
form $\omega \in \Omega$ が basic であるとは, $\iota(X)\omega = \mathfrak{L}_X \omega = 0$, $X \in \Gamma(E)$ のときをいう.

Ω_B を M 上の basic forms 全体の空間とする. Ω_c を compact support を持つ forms の空間とする. また, $\Omega_{B,c} := \Omega_B \cap \Omega_c$ とおく.

単射 (injection) $\Omega_B^* \longrightarrow \Omega^*$, $\Omega_{B,c}^* \longrightarrow \Omega_c^*$ は, cohomology レベルで 次数 0, 1 の monomorphism を誘導する.($\alpha = df$ が basic ならば, f は basic である). Riemann 葉層構造の場合には, 二つの chain 複体を考えることができる；

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d_E} \Omega^{(0,\cdot)} \xrightarrow{d_E} \cdots \xrightarrow{d_E} \Omega^{(p,\cdot)} \xrightarrow{d_E} 0 \tag{*}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d_B} \Omega_B^0 \xrightarrow{d_B} \cdots \xrightarrow{d_B} \Omega_B^q \xrightarrow{d_B} 0 \tag{**}$$

(*),(**) をそれぞれ leafwise, basic chain 複体という. (*),(**) による cohomology をそれぞれ leafwise cohomology, basic cohomology という.

3.Rumin 複体の葉層構造の立場からの書きかえ

(M,η) を $(2m+1)$ 次元 contact manifold とする. このとき, $TM = E \oplus \mathcal{D}$, E は Reeb vector field T $(\eta(T)=1)$ による foliation である. $d\eta$ の $\mathcal{D} := \ker \eta$ への制限は $\mathcal{D}$ 上に (almost) complex structure を与える. associated Riemannian metric を $g_\eta := \eta \otimes \eta + d\eta(\cdot, J\cdot)$ で与えることにする. $d^{-1,2}$ は Hermitian geometry の

Λ に対応し, 零でない. Rumin complex を次の形になる；

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{d_B} \mathcal{R}^1 \xrightarrow{d_B} \mathcal{R}^2 \xrightarrow{d_B} \cdots \xrightarrow{d_B} \mathcal{R}^m$$
$$\xrightarrow{\widetilde{D}} \mathcal{R}^{m+1} \xrightarrow{d_B} \mathcal{R}^{m+2} \cdots \xrightarrow{d_B} \mathcal{R}^{2m+1} \longrightarrow 0$$

ここに,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}^k := \Omega^{0,k}/\mathrm{im}(d^{-1,2}), \quad k \le m \\
&\mathcal{R}^k := \Omega^{1,k-1} \cap \ker(d^{-1,2}), \quad k \ge m+1 \\
&d_B := \pi \circ d^{0,1} : \mathcal{R}^k \longrightarrow \mathcal{R}^{k+1} \\
&\widetilde{D} := \pi \circ (d^{1,0} - d^{0,1}(d^{-1,2})^{-1} d^{0,1}) : \mathcal{R}^m \longrightarrow \mathcal{R}^{m+1}
\end{aligned}$$

また, π は直交作用素 $\Omega^k \longrightarrow \mathcal{R}^k$ である.

$d\eta$ は symplectic form であるから, $d\eta|_{\mathfrak{D}}$ 上に 互いに共役な m 次元葉層構造 D_m, または D'_m が存在する. $\mathcal{R}^k$ $(k \le m)$ は D_m に関する basic 複体である, すなわち,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega_B^0 \xrightarrow{d_B} \Omega_B^1 \xrightarrow{d_B} \cdots \xrightarrow{d_B} \Omega_B^{2m} \longrightarrow 0 \qquad (E_B)$$

は E に関する basic 複体で,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega_B^0 \xrightarrow{d_B} \Omega_B^1 \xrightarrow{d_B} \cdots \xrightarrow{d_B} \Omega_B^{m} \longrightarrow 0 \qquad (D_{m,B})$$

$TM/E = D_m \oplus D'_m$ における D_m または D'_m の basic 複体である. したがって, Rumin 複体は $\widetilde{D}$ によって, $D_{m,B}$ を E_B に埋め込んだ複体と考えることができる.

4. Ω_B と $\Lambda^*(M)$ の計算

(M, g, E) を m 次元 Riemannian manifold で, E は M に与えられた p $(p+q := m)$ 次元 riemann 葉層構造とする. g は transversal holonomy invariant, すなわち, bundle-like と仮定する. 簡単のため, M は compact(完備でもよい) で, 少なくとも 1 つの compact leaf を持つとする. 微分作用素 D を合成

$$D : \Omega^{(p,0)} \xrightarrow{\int_E} \Omega_B^0 \xrightarrow{d_B} \Omega_B^1$$

で定義する, ここに, $\int_E : \Omega^{(p,0)} \longrightarrow \Omega_B^0$, $\omega := f\chi_E \longmapsto \int_E f\chi_E$ は leaves に沿っての積分である. χ_E は E に沿っての characteristic form である.

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{J}^{(k,0)} := \begin{cases} \Omega^{(k,0)} \cap \ker\, d_B, & k = 0, 1, \cdots, p-1 \\ \Omega^{p,0}. \end{cases} \\
&\mathfrak{J}_c^{(k,0)} := \Omega_c^{(k,0)} \cap \mathfrak{J}^{(k,0)}, \quad k = 0, 1, \cdots, p.
\end{aligned}$$

とおく. chain 複体;

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{J}^{(0,0)}(M) \xrightarrow{d_E} \mathfrak{J}^{(1,0)} \xrightarrow{d_E} \mathfrak{J}^{(2,0)} \xrightarrow{d_E} \cdots \xrightarrow{d_E}$$
$$\mathfrak{J}^{(p,0)} \xrightarrow{D} \Omega_B^1 \xrightarrow{d_B} \cdots \xrightarrow{d_B} \Omega_B^q \longrightarrow 0. \qquad (***)$$

で定義する．実際に，
(i)$d_B \circ D = 0$,
(ii) $D \circ d_E = 0$.
が成り立つ．

5. Chain 複体 (***) の cohomology 群

(***) に付随した cohomology 群を考える；

$$H^{(p,0)}(M) := \{\omega \in \mathfrak{J}^{(p,0)} \mid D\omega = 0\}/\{\eta \mid \eta = d_E\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{J}^{(p-1,0)}\}, \tag{5.1}$$

$$H^1(M) := \{\omega \in \Omega^1_B \mid d_B\omega = 0\}/\{\eta \mid \eta = D\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{J}^{(p,0)}\}. \tag{5.2}$$

対応する copmact support を持つ cohomology 群を $H^*_c(M)$ etc. で表す．このとき，次が成り立つ；

Theorem 5.1 E は transversal holonomy invariant metric をもつ closed Riemannian manifold 上の Riemann 葉層構造で，少なくとも 1 つの compact leaf を持つとする．このとき，$H^{(p,0)}(M) \simeq \mathbb{R}$.

Corollary 5.2 E は transversal holonomy invariant metric をもつ complete Riemannian manifold 上の Riemann 葉層構造で，少なくとも 1 つの compact leaf を持つとする．このとき，$H^{(p,0)}_c(M) \simeq \{0\}$.
leafwise 複体 (*) によって，p 次 leafwise cohomology 群 $H^p_E(M) := \Omega^{(p,0)}/\mathrm{im}\ d_E$ が定義できる．

Corollary 5.3 E は transversal holonomy invariant metric をもつ complete Riemannian manifold 上の p 次元 Riemann 葉層構造で，少なくとも 1 つの compact leaf をもつとする．このとき，$H^p_{E,c}(M) \simeq H^0_{B,c}(M) \subset (\mathfrak{J}^{(0,0)}_c)^\perp$.
chain 複体 (**) による basic cohomology 群を $H^1_B(M) := \ker\ d_B/\mathrm{im}\ d_B$ で定義する．

Corollary 5.4 E は transversal holonomy invariant metric をもつ closed Riemannian manifold 上の Riemann 葉層構造で，少なくとも 1 つの compact leaf を持つとする．このとき，$H^1_c(M) = H^1_{B,c}(M)$.
Ω^*_B 上に global inner product を定義する；

$$(\phi, \psi) := \int_M \phi \wedge *\psi = \int_M \phi \wedge \bar{*}\psi \wedge \chi_E,$$

ただし，$\bar{*}\psi := (-1)^{p(q-r)} * (\psi \wedge \chi_E) \quad \psi \in \Omega^r_B$.
　このとき，D^* を D の $(\cdot,\cdot)$ に関する形式的共役作用素とすると

$$D^* = \rho_E^{-1}\delta_B \quad \text{on } \Omega^1_B. \tag{5.3}$$

ただし，$\rho_E := \frac{1}{C}\int_E$, δ_B は d_B の $(\cdot,\cdot)$ に関する形式的共役作用素である．chain 複体 (***) の Laplacian を考える；

1. On $\mathfrak{J}^{(u,0)}$ $(u \leq p-1)$, $\Box^{(u,0)} := d_E\delta_E + \delta_E d_E = \Box_E$ (the tangential Laplacian),
2. On Ω^v_B $(v \geq 2)$, $\Box^v := d_B\delta_B + \delta_B d_B =: \Box_B$ (the basic Laplacian),
3. On $\mathfrak{J}^{(p,0)}$, $\Box^{(p,0)} := d_E\delta_E + D^*D$,

4. On Ω^1_B, $\square^1 := \delta_B d_B + DD^*$.

ここに, δ_E は d_E の $(\cdot,\cdot)$ に関する形式的共役作用素である.

Theorem 5.5

1. $\square^{(p,0)} = \square_E + \square_B$,
2. $\square^1 = \square_B$.

6. 消滅定理

TM 上に Riemann 葉層構造に密接に関連する connection $\nabla^{\oplus}$ を定義できる (I.Vaisman ([V])). ∇^M を TM 上の Levi-Civita connection とする.

$$\nabla^{\oplus}{}_X Y := \pi^{\perp}\nabla^M{}_X \pi^{\perp} Y + \pi \nabla^M{}_X \pi Y \quad \text{for } X, Y \in \Gamma(TM) \tag{6.1}$$

とおく, ここに,π(resp.$\pi^{\perp}$) : $TM \longrightarrow E$(resp. $E^{\perp} := Q$) は標準的射影である.

Theorem 6.1([V]) E を closed Riemannian manifold 上の p 次元 Riemann 葉層構造で, transversal holonomy invariant metric を持つとする. $\langle \sum_{i,j} R^{\oplus}_{ij}\phi, \phi\rangle \geq 0 \quad \forall\, \phi \in \Omega^{p,0}$ ならば,$\mathcal{H}^{p,0}(M) = \mathbb{R}$.

7.C,C^*-harmonic forms

(M, η) を $2m+1$ 次元 compact contact manifold とする. 自然に metric $g_\eta := \eta \otimes \eta + d\eta(\cdot, J\cdot)$ が定まる, ここに, J は $\mathfrak{D}$ 上の almost cmplex structure である. さらに, $\nabla g_\eta = 0$ なる connection ∇ が定まる.

η によって定まる Reeb vector 場 T の生成する Riemann 葉層構造 E を考える. $M \longrightarrow M/E$ (V-manifold) は S^1-V-bundle と仮定する.

M 上の k-form $\phi \in \Omega^k$ が C-(resp.C^*)- harmonic であるとは, $\iota_T\phi = 0, d\phi = 0, \delta\phi = e(\eta)\Lambda\phi$ (resp.$e(\eta)\phi = 0, d\phi = \iota_T L\phi, \delta\phi = 0$) のときをいう.

Theorem 7.1 (1) $\phi \in \Omega^{k,0}$ が harmonic ならば, ϕ は basic かつ $\square_B\phi = 0$, また, C-harmonic である. 逆に, $\phi \in \Omega^k$ が C-harmonic ならば, ϕ は basic かつ $\square_B\phi = 0$,

(2) $\psi \in \Omega^{k,1}$ が harmonic ならば, ψ は basic かつ $\square_B\psi = 0$, また,C^*-harmonic である. 逆に, $\psi \in \Omega^{k+1}$ が C^*-harmonic ならば, ψ は basic かつ $\square_B\psi = 0$.

Bibliography

[R1] M.Rumin, *Un complexe de formes différentielles sur les variétés de contact*, C.R.Acad.Sci.Paris **t310** (1990), 401-404.

[R2] M.Rumin, *Formes differetielles sur les variétés de contact*, J. of Differential Geometry **39**(1994), 281-330.

[V] I.Vaisman, *Variétés riemanniennes feuilletées*, Czechoslovak Math.J.**21** (1971), 46-75.

学位論文審査結果の要旨

提出された学位論文について，2回にわたり学位審査委員会を開催し，その内容および，関連資料について面接審査，口頭発表を行った上，以下の通り判定した。

本論文は，1990にM.Ruminによって定義された接触多様体に付随したde Rham複体をRiemann流(Riemannian flow)の立場から書きかえることによって，Riemann葉層構造について知られているde Rham複体に新しい知見を与えた。

Riemann葉層構造には二つのde Rham複体，葉的複体(leafwise complex)と底的複体(base-like complex)とが知られている。本論文では，これら二つのde Rham複体を繋ぐ微分作用素Dを定義して新しいde Rham複体を構成し，そのcohomology群を計算した。

また，この複体の調和形式を計算し，応用として，接触多様体より狭い「佐々木多様体」で研究されてきたC-調和形式，C^*-調和形式の理論を整理した。

以上から，この論文は博士学位論文に値するものと判定した。